

チューンに依存しない線型、非線形および結合共鳴の生成

TUNE FREE LINEAR, NON-LINEAR AND COUPLING RESONANCE EXCITATION

中村 剛

Takeshi Nakamura

Japan Synchrotron Radiation Research Institute

Abstract

Nonlinear Resonances in ring accelerators are used for injection or extraction of a beam. And coupling resonance is introduced to enlarge bunch volume to reduce the intra-beam scattering to avoid the degradation of beam quality at low emittance rings. However, the betatron or synchrotron tunes of a ring have to fulfill some condition to excite the resonances. To remove such condition on tunes, we propose the method of the excitation of the resonances with AC resonance sources.

1. はじめに

リング型加速器において、共鳴現象は、ビーム品質の劣化を引き起こすものとして避ける場合が多いが、一方、3次共鳴を用いた入射や取り出し、半整数共鳴による入射などの共鳴の積極的な応用も行われてきた。また、将来の放射光リングのような、極低エミッタンス電子リングでは、結合共鳴を用いてバンチ体積を増大させ、内部散乱によるビーム品質の低下を避けることが検討されている。

一方、共鳴は特定のチューン条件でのみ発生するため、リングの運転条件に強い制約を課す。

これに対して、ここでは、共鳴源を AC 駆動することにより、リングのチューンによらずに共鳴を駆動する手法を提案する。たとえば、3次共鳴であれば AC 六極磁石、4次共鳴や2次共鳴であれば AC 八極磁石、そして水平・垂直の振動の結合共鳴であれば AC skew 四極磁石を、チューンの値に応じた周波数で駆動することによりそれらの共鳴を引き起こすことができる。

これまでに、AC 駆動の skew 四極磁石を用いた垂直、水平振動の結合[1]が提案されており、また、4極磁石を AC 駆動することにより、半整数共鳴を駆動することも、KEK にて試みられてきたが[2]、ここでは、特に、これを非線形共鳴に拡張する

2. AC 駆動多重極による共鳴生成

原理を示すために、Eqs.(1),(2)で示すような簡単なモデル

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = k(t)x^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \quad (1)$$

$$k(t) = k_0 \cos(\Omega t + \phi) \quad (2)$$

を考える。すなわち、リングを周回する粒子の横方向の位置 x の運動は、周波数 ω の調和振動子に、 x に依存したキックがリング一周の周期で加わっているものとする。ただし、キックの強さ、あるいは磁石の強さを示す $k(t)$ は通常ならば定数であるが、ここでは、時間依存性

をもたせている。 $k(t)$ を以下では共鳴源とよぶ。

さて、Eqs. (1),(2) の性質を考える。まず、一周期での振動の変化は小さいとして、右辺の x を自由振動

$$x(t) = u \cos \omega t \quad (3)$$

とし、また、Poisson の和公式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip\omega_0 t} \quad (4)$$

を適用することにより、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{2\pi}{\omega_0} k_0 u^m \cos(\Omega t + \phi) \cos^m \omega t \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip\omega_0 t} \quad (5)$$

が得られる。右辺のもつ周波数成分について考える。右辺は、 $m\omega$ の周波数をもつ因子 $\cos^m \omega t$ が、 Ω の周波数を持つ因子と、周回周波数の任意の整数 p 倍である $p\omega_0$ を持つ因子とが掛け合わされているので、 $\Omega \pm m\omega + p\omega_0$ の周波数を持つ。これが左辺の共振周波数 ω に等しい時に共鳴が発生するので、共鳴の条件は、 $\pm\omega = \pm\Omega \pm m\omega + p\omega_0$ 、あるいは

$$\Omega = \pm(1 \pm m)\omega + p\omega_0 \quad (6)$$

となる。すなわち、この周波数 Ω で、共鳴源の強さを AC 駆動すれば、共鳴が生成可能となる。式(10)の両辺を ω_0 で割って $\Omega = \mu\omega_0$ と定義すると、チューンの関係式

$$\mu = \pm(1 \pm m)\Delta v + p \quad (7)$$

となる。ここで、 $\mu = 0$ とすると、通常の共鳴の条件 $(1 \pm m)\Delta v = p$ となる。

この例として、 $m = 0$ は、よく知られている RFKO の原理となり、 $m = 1$ は、KEK で AC 四極磁石を用いて行われた半整数共鳴の励起[2]となる。

AC 駆動の共鳴源を用いた共鳴の特徴としては、

- 通常は、チューンが特定の条件を満たす場合のみ共鳴が励起されるが、共鳴源を Eq. (7) の周波数で駆動することにより共鳴を励起することができる。
- 共鳴源が、独立している。例えば、3次共鳴の場合

nakamura@spring8.or.jp

には、ラティスの要素としての六極も共鳴源となるが、AC 駆動の場合には、AC 駆動している六極のみが源となる。

- 複数の共鳴を同時に引き起こすことができる。通常では、1つの共鳴条件しか満たすことができないが、本手法では、複数の共鳴を同時に引き起こすことができる。

などが挙げられる。ただし、共鳴のセパトリティクスは、AC 駆動の場合には、毎ターン毎に、AC 駆動の位相に応じて変動することになる。

以下では、共鳴を用いた入射や、出射などへの応用の可能性について示す。

3. AC 六極による三次共鳴入射

このような AC 多極による共鳴の応用として、AC 六極による三次共鳴を用いた入射の可能性を検討する。例として、あいち SR の蓄積リングを取り上げる。このリングでは、パルス六極、すなわち、入射のターンのみ励起する六極磁石を用いた入射を試験中であるが[3]、ここでは、このパルス六極を AC 六極に置き換えた場合を検討する。

あいち SR では、入射ビームは、水平の β 関数が 30m の直線部において、振幅 40mm、角度 0 で入射される。パルス六極では、この入射ビームの位置が 20mm となったときに、1mrad のキックを与えて、ダイナミックアパチャ内に入射ビームをキャプチャする。このときの振幅は、19mm となる。パルス六極に必要なキックの強さは、キックを

$$\theta = \frac{1}{2} k_2 x^2 \quad (8)$$

として定義すると、 $k_2 = 5.8$ となる。

AC 六極を用いた場合を考える。三次共鳴を生成するために、キックの強さ k_2 を Eq. (7) において $\mu = 3\Delta\nu$ としたもの、すなわち、Eq. (2) として

$$k_2(t) = k_0(t) \cos(3\Delta\nu\omega_0 t + \phi) \quad (9)$$

とする。ここで、 $\Delta\nu$ は、水平のチューンの小数部であり、あいち SR の場合には、0.72 である。時刻 t については、入射ビームが最初に AC 六極を通過する時刻を $t=0$ とする。ここでは、原理の可能性を探るため、入射ビームは広がりを持たない点として取り扱う。実用とするためには、実際のビームの広がりを考慮した計算を行う必要がある。AC 六極による入射が成立したとみなせる条件を

- (1) 入射セプトラムに衝突しない条件として、入射されたビームは入射された後に、入射点を通る際には入射軌道から蓄積軌道側に 10mm 以上離れた場所を通過する。
- (2) 入射ビームの単一粒子エミッタンス (Courant-Snyder invariant) の入射過程終了時の値は、パルス六極の入射での値と同程度。

とする。ただし、大振幅で周回する期間が長くなることによる非線形の効果は取り入れていない。

AC 六極のパラメータは、そのエンベロープ関数 k_0 、位相 ϕ 、および入射点からの AC 六極設置点までのベータトロン位相 ψ となるが、ここでは、 $\phi = 0$ として、 k_0 および ψ を変えて上記の条件を満たす場合を探した。

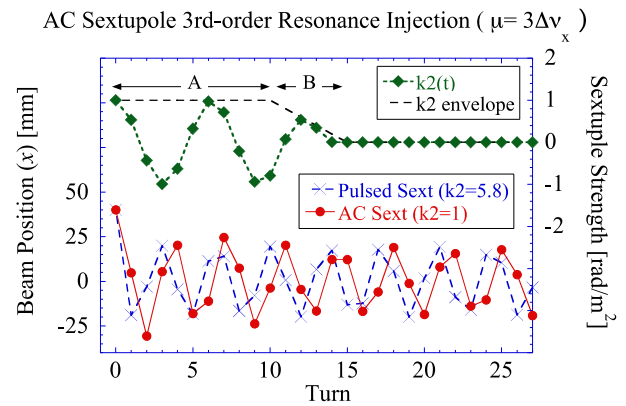


Figure 1: Third integer resonance injection driven by AC sextupole. Upper lines: sextupole kick strength (dotted) and its envelope (dashed). Lower lines: Injected beam position with AC sextupole (solid line with circles) and with pulsed sextupole (dashed line with crosses).

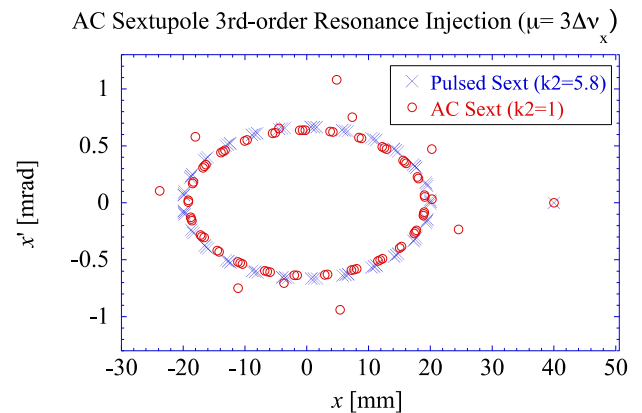


Figure 2: Third integer resonance injection driven by AC sextupole. Injected beam in phase space (x, x') at injection point. The first turn of the injected beam is at (40, 0).

条件を満たす1例を Figs. 1, 2 に示す。この例では必要な AC 六極の強さは、パルス六極の $k_2 = 5.8$ に比べて1程度でよく、1/5 以下となっている。また、パルス六極では、パルス磁場により渦電流が発生し、それが蓄積ビームの通過位置に磁場を生成してキックを与え、蓄積ビームの振動が励起される減少が見られるが[3]、AC 六極では、生成する磁場強度が小さいこと、磁場の変化量が小さいこと、そして、ベータトロン振動の周期程度の時間にわたってキックを発生することから単発のキックとなるパルス六極にくらべて振動の励起が小さいこと、などが期待され、蓄積ビームの振動は、パルス六極に比べて小さいと考えられる。

AC 六極の場合、共鳴のセパトリティクスは、ターンごとに変化するので、Fig. 2 には明確なセパトリティクスは現れていない。

ここでは、AC 駆動の位相 ϕ を固定し、入射点から AC

六極までのベータatron位相差 ψ を変えて入射可能なパラメータを探索したが、実用とするためには、 ψ を固定して、 ϕ を変えて最適条件を探ることも必要となる。

4. AC 八極による半整数共鳴・四次共鳴入射

次に、AC 八極による入射を検討する。AC 八極では、Eq. において $m = 3$ の場合となり、

$$\mu = \pm 2\Delta v, \pm 4\Delta v$$

の2つの共鳴が可能である。前者は半整数共鳴であり、後者は四次共鳴に相当する。四次共鳴の場合を Figs. 3, 4 に示す。また、半整数共鳴の場合を、Figs. 5, 6 に示す。ここで、キックの強さ k_3 は、

$$\theta = \frac{1}{6}k_3x^3 \quad (10)$$

で定義している。また、比較のため、パルス八極との比較を示している。この2つの例では、ともに、パルス八極より弱いキックで良いが、とくに、半整数共鳴が k_3 について、強さ、駆動時間も、小さい駆動でよいことがわかる。ただし、駆動周波数は高くなる。

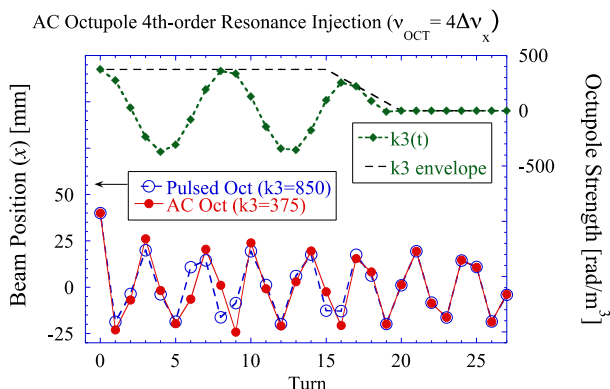


Figure 3: Fourth integer resonance injection by AC octupole.

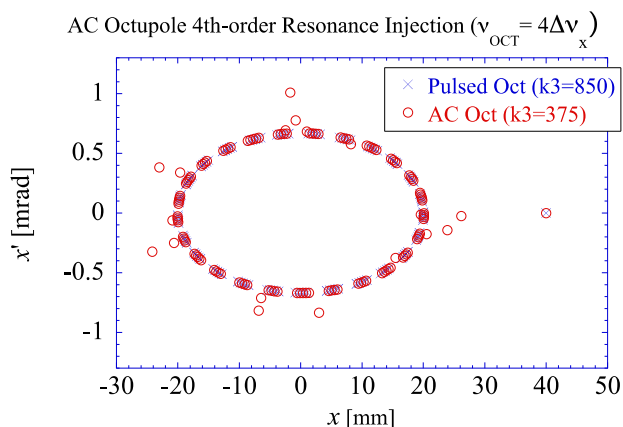


Figure 4: Fourth integer resonance injection by AC octupole. Injected beam in phase space (x, x') .

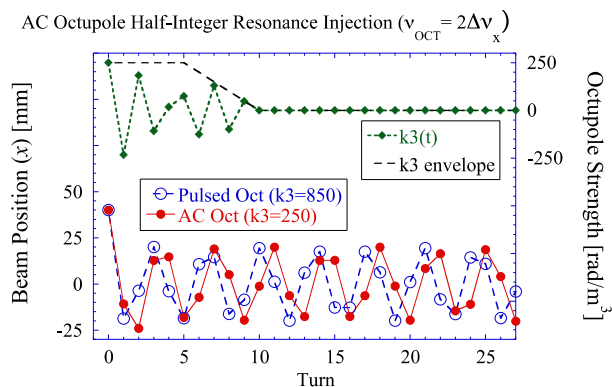


Figure 5: Half integer resonance injection by AC octupole.

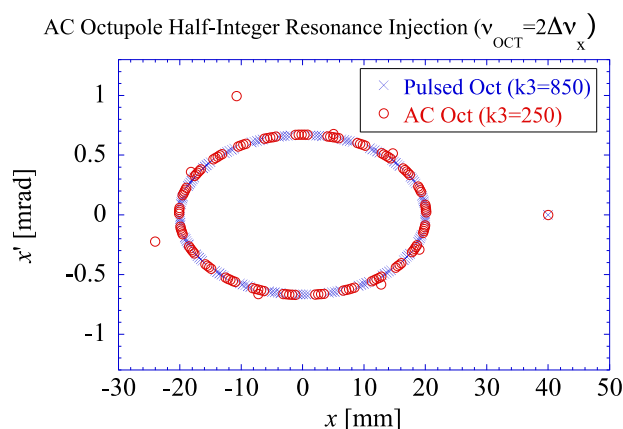


Figure 6: Half integer resonance injection by AC octupole.

5. まとめ

AC の励起源を用いることにより、チューンに条件を課すことなく種々の共鳴を励起する方法を提案し、その応用例としてリングへの入射への適用の可能性を示した。この方法は、非線形の結合共鳴にも拡張可能であり、その場合には、大振幅の粒子について強い x - y 結合が生じることとなる。

参考文献

- [1] 中村剛, "差共鳴によらない X-Y 結合生成と USR への応用", 日本物理学会 第 68 回年次大会 (2013).
- [2] S. Sakanaka, Y. Kobayashi, T. Mitsuhashi and T. Obina, Proc. Of PAC'01 (2001), <https://accelconf.web.cern.ch/accelconf/p01/PAPERS/WOPA004.PDF>
- [3] 伊藤圭哉, 山村光平, 保坂将人, 真野篤志, 高嶋圭史, 加藤政博, "あいち SR におけるトップアップ運転用パルス多極電磁石の開発と入射実験[2]", 日本物理学会 第 71 回年次大会 (2016).