

エミッタンス低減現象を定量的に表す新指標の提案 PROPOSING NEW INDEX FOR TREATING EMITTANCE REDUCTION QUANTITATIVELY

水野 明彦 *A)

Akihiko Mizuno *A)

A) Japan Synchrotron Radiation Research Institute(JASRI)

Abstract

An rms emittance, which is often used in the linear accelerators, is not an invariant value, since it is different from the constant value of the Liouville's theorem. Therefore, it can be reduced and the author have already reported the mechanisms in this conference series [1]. The author showed the electron injector design based on emittance reductions in that previous report, though the emittance reductions were not discussed quantitatively. In this report, the author propose a new index for treating emittance reductions quantitatively. The new index is defined by simple arithmetic mean in place of root-mean-square, and behavior of the new index along a beam axis is similar with that of the rms emittance. And it is defined as negative when a curve plotting on $r-r'$ plain is convex downward, and as positive when a curve is convex upward. In this conditions, the new index always reduces when forces whose shape is convex downward curve in the $r-f_r$ plain act. Therefore, the emittance reduction mechanisms can be simply described, and the quantitative discussions on the emittance reductions become possible. In this report, the author discuss a definition of the new index, and some examples of behavior of the new index are presented.

1. はじめに

線型加速器においては、rms エミッタンスが良く用いられる。これはリウヴィルの体積とは異なり不変量ではないため、空間電荷効果やソレノイド磁場等の非線形力がビームに作用すると、トランスバース rms エミッタンスが減少することもある。Figure 1 に、カソード直後でエミッタンスが減少する計算例を示す。KUAD2 [2]、および Bulk-to-Point Calculation Code [3] で計算したものであり、両者は良く一致している。

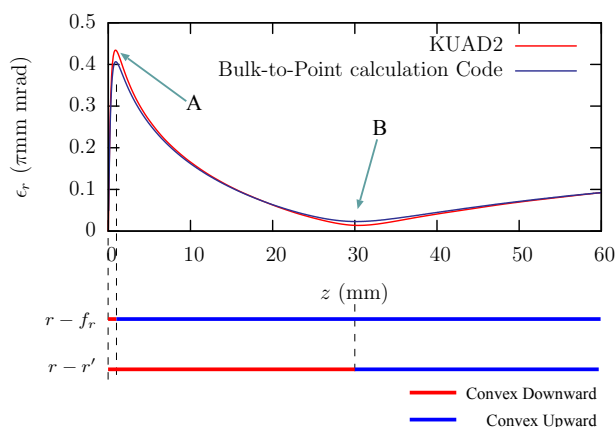


Figure 1: Examples of the emittance reduction for an ideal DC-accelerated continuous beam.

この例は、理想的な平面カソードから、 $\phi 2$ mm で一様に電荷分布をした初期エミッタンス 0 mrad の連続ビームを、一様電場 5 MV/m で引き出し、その電場で加速し続けたもので、以前の本学会年会で報告 [1] している。引き出し電流は 40 A/cm² であり、カソード鏡像効果を

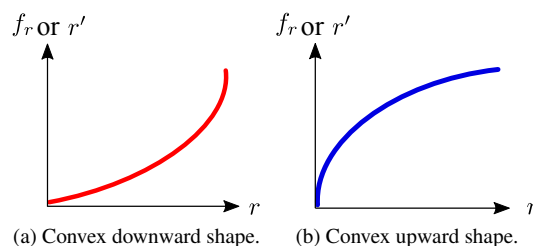


Figure 2: Radial momentum and radial force as a function of r . Two shape patterns which are convex downward and convex upward are illustrated.

考慮している。規格化 rms エミッタンスは、Eq. (1) のようにある位置 z を通過した粒子のパラメータを積算することによって算出したもので、時間を固定してバンチ全体の期待値より求めた投影エミッタンスとは異なり、スライスエミッタンスの定義に近いものである。

$$\epsilon_r(z) = \sqrt{\langle r^2 \rangle_z \langle (\gamma\beta r')^2 \rangle_z - \langle \gamma\beta r r' \rangle_z^2} \quad (1)$$

rms エミッタンスの増減は、Fig. 2 に示すような、 $r-r'$ 位相空間分布と、ビームに働く力を f_r とした時の $r-f_r$ 空間分布の形状によって決まる。Figure 1 の例では、 f_r は空間電荷によるものであるが、カソード直後ではカソード鏡像効果によって $r-f_r$ 空間分布が Fig. 2a に示すように下に凸となっており、そのため位相空間分布も下に凸となっている。両空間分布とも下に凸の場合、エミッタンスは増加する。A 点を過ぎると、ビームは径方向に拡散するようになり、その結果、 $r-f_r$ 空間分布は上に凸に変化するが、位相空間分布は依然として下に凸を保っている。このように両空間分布の凸凹が異なる場合、エミッタンスは減少する。B 点以降では、位相空間分布も上に凸に変化する。両空間分布とも上に凸な

* mizuno@spring8.or.jp

ので、エミッタンスは再び増加する。

エミッタンス減少の原理を示す。Figure 2a のような下に凸の位相空間曲線上に電子が分布している場合を考える。その電子の内、任意の2つの電子と原点が成す平行四辺形の面積に注目する。この位相空間に、Fig. 2b のような上に凸の力が作用すると、 $r - r'$ 、 $r - f_r$ の両曲線とも変曲点を持たないことを仮定しているため、任意の平行四辺形の面積は減少する。次章で示すように、rms エミッタンスは平行四辺形の面積の二乗平均平方根の関数であるから、減少することとなる。詳細は文献 [4] を参照して頂きたい。

2. 新指標の提案

エミッタンス減少効果は、 r' と f_r の r 方向分布に複雑に関連する上、減少の程度を定量的に表せていない点で分かり難い。rms エミッタンスの定義を拡張した新たな指標により、定量的に表現できれば便利である。rms エミッタンスは、 $\langle r^2 \rangle \langle r'^2 \rangle$ と $\langle rr' \rangle^2$ の項で表されるが、各電子 ($i = 1 \dots n$) で展開すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} n^2 \langle r^2 \rangle \langle r'^2 \rangle &= (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2) (r_1'^2 + r_2'^2 + \dots + r_n'^2) \\ &= r_1^2 r_1'^2 + r_1^2 r_2'^2 + \dots + r_1^2 r_n'^2 \\ &\quad + r_2^2 r_1'^2 + r_2^2 r_2'^2 + \dots + r_2^2 r_n'^2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + r_n^2 r_1'^2 + r_n^2 r_2'^2 + \dots + r_n^2 r_n'^2 \end{aligned} \quad (2)$$

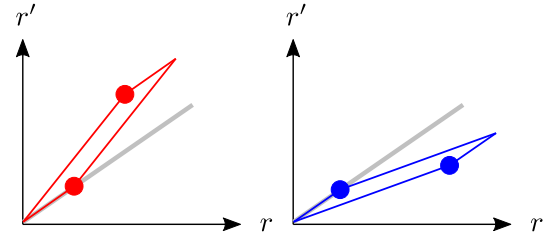
$$\begin{aligned} n^2 \langle rr' \rangle^2 &= (r_1 r_1' + r_2 r_2' + \dots + r_n r_n')^2 \\ &= r_1^2 r_1'^2 + r_2^2 r_2'^2 + \dots + r_n^2 r_n'^2 \\ &\quad + 2r_1 r_1' r_2 r_2' + 2r_1 r_1' r_3 r_3' + \dots + 2r_1 r_1' r_n r_n' \\ &\quad + 2r_2 r_2' r_3 r_3' + \dots + 2r_2 r_2' r_n r_n' \\ &\quad + \dots \\ &\quad + 2r_{n-1} r_{n-1}' r_n r_n' \end{aligned} \quad (3)$$

Equation (2) から Eq. (3) を引くと $r_i^2 r_i'^2$ の項が消えて、

$$\begin{aligned} n^2 \left(\langle r^2 \rangle \langle r'^2 \rangle - \langle rr' \rangle^2 \right) &= n^2 \epsilon_r^2 = \\ &= (r_1 r_2' - r_2 r_1')^2 + (r_1 r_3' - r_3 r_1')^2 + \dots + (r_1 r_n' - r_n r_1')^2 \\ &\quad + (r_2 r_3' - r_3 r_2')^2 + \dots + (r_2 r_n' - r_n r_2')^2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (r_{n-1} r_n' - r_n r_{n-1}')^2 \end{aligned} \quad (4)$$

となる。Equation (4) の右辺は、 $r - r'$ 位相空間上で、任意の2電子と原点が成す平行四辺形の面積の2乗の合計であるから、その面積を S_j 、 $j = 1 \dots N$ 、 $N = n(n-1)/2 \approx n^2/2$ とすれば、rms エミッタンスは

$$\epsilon_r = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^N S_j^2 \right) / n^2} = \sqrt{\langle S^2 \rangle} / \sqrt{2} \quad (5)$$



(a) Electrons for S is negative. (b) Electrons for S is positive.

Figure 3: Positive and negative area of parallelograms which are formed by arbitrary two electrons on a phase space.

となる。

ここで、 S は負の値をとっても良いと考えてみよう。エミッタンスの増減に寄与する Fig. 2a と Fig. 2b の形状の違いは、Fig. 3 のように、電子2個でも表現可能である。Figure 3a のように、 r が小さい方の電子と原点を結ぶ直線よりも上方にもう一方の電子が存在する場合は、Fig. 2a のような下に凸の形状に対応し、この場合は $S < 0$ と定義する。Figure 3b は Fig. 2b のような上に凸の形状に対応し、これは空間電荷効果で電荷が径方向に拡散する際に現れる一般的な形状なので、 $S > 0$ と定義する。このように定義しても、 $\langle S^2 \rangle$ で表される rms エミッタンスの値が変わることは無いが、新指標を

$$\epsilon_{mean} = \alpha \langle S \rangle \quad (6)$$

と定義すれば、その値は、位相空間分布の凸凹の違いとその程度を表すものとなる。係数 α は、 S が全て正で、かつ正規分布している時に、rms エミッタンスの値に一致するように決めれば都合が良いであろう。この時、 $\langle S \rangle = \sqrt{2/\pi} \cdot \sqrt{\langle S^2 \rangle}$ が成り立つから、

$$\epsilon_{mean} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle S \rangle \quad (7)$$

とすれば良い。これを、rms エミッタンスに対して mean エミッタンスと呼ぶことにする。

3. エミッタンス低減の計算例

ここでは、mean エミッタンスで表したエミッタンス低減現象を、複数の例について検討する。なお、これ以後の計算は、Bulk-to-Point Calculation Code で行った。

3.1 連続ビームでの計算例

Figure 1 に示した連続ビームの例について、mean エミッタンスで表したものを Fig. 4 に示す。rms エミッタンス、mean エミッタンスともに、規格化エミッタンスを示している。rms エミッタンスが最小値を示す B 点までは、mean エミッタンスは負となっている。本例では、位相空間分布は Fig. 2 に示すように変曲点を持たないので、この場合、各 S_j 、 $j = 1 \dots N$ は全て負である。したがって、位相空間上の曲線が下に凸になっていることを示している。これに対し、B 点以降では正となり、上に凸の分布となっていることが分かる。

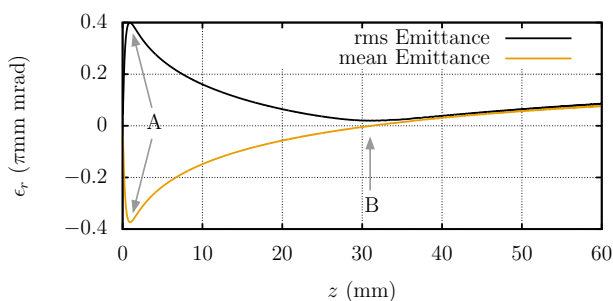


Figure 4: Behaviors of rms and mean emittance for an ideal DC-accelerated continuous beam.

rms エミッタンスは、下に凸の位相空間分布に上に凸の f_r が作用する場合、または、上に凸の位相空間分布に下に凸の f_r が作用する場合に減少する。これに対し、mean エミッタンスは下に凸の位相空間分布の状態では負、上に凸の場合は正であるので、下に凸の f_r が作用する場合は常に減少し、上に凸の、径方向にビームが拡散する通常の間電荷効果に起因する f_r が作用する場合は常に増加する。

Figure 4 では、カソードより A 点まで mean エミッタンスが減少する。これは、カソード鏡像効果によって、通常の間電荷効果とは異なる、下に凸の f_r が生じていることに起因する。A 点を過ぎると、通常の間電荷効果、すなわち上に凸の f_r がビームに作用するようになるので、それ以後は mean エミッタンスが増加を続ける。rms エミッタンスの方は、mean エミッタンスの絶対値にほぼ一致する。

なお、B 点において mean エミッタンスがゼロとなっている。これは、全ての S がゼロではなく、正負の S が混在しその合計がゼロということである。すなわち、B 点では位相空間上の曲線に変曲点があり、上に凸、下に凸のどちらにも分類できない状態となっている。そのため、rms エミッタンスは小さいながらも値を持っている。

Figure 5 に、Fig. 4 と同条件の計算において、 $z = 20$ mm の位置にソレノイドコイルを置いてビームを絞った場合の結果を示す。上図は、 1σ のビーム径である。

B 点までと D 点以降では、mean エミッタンスが増加しており、これらの区間において上に凸の f_r が働いていることを示している。これに対し、B 点から D 点の間では下に凸の f_r が働いている。この区間では、 $z = 20$ mm の位置で絞ったビーム径が、ほぼ $r < 0.5$ mm となっている。すなわち、ビームが十分に絞られた結果、下に凸の間電荷効果が働くようになったということで、これは次のように説明できる。

B 点までは、Fig. 6 の青線で示すように電荷密度分布が径方向外側になるほど低くなっており、上に凸の f_r が働いている。このビームに対し、 r に線形なソレノイド集束力 f_{r-sol} が作用すると、径方向外側は電荷密度が低いので急激に集束されるが、内側は密度が高く集束され難いために電荷密度分布が反転し、赤線で示した分布となる。これは f_r が下に凸の状態であり、この例では $r < 0.5$ mm の範囲内に相当する。この結果、mean エミッタンスが減少したのである。下に凸の f_r が働き続けることにより、位相空間分布も C 点以降で下に凸に変

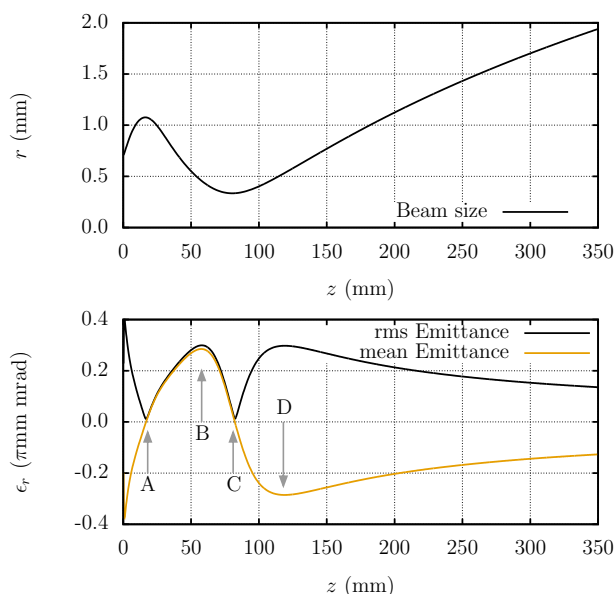


Figure 5: Behaviors of rms and mean emittance for an ideal DC-accelerated continuous beam with focusing.

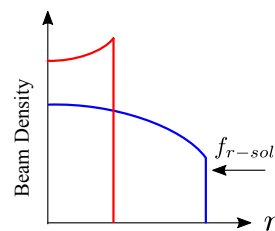


Figure 6: Shape of beam density distribution changes by linear focusing forces.

化しているが、ビームサイズが $r > 0.5$ mm になる D 点以降で、 f_r は再び上に凸に変化している。

この例でも、rms エミッタンスは mean エミッタンスを A 点、C 点で折り返したようになっており、結果、rms エミッタンスが振動する特徴的な状態を示している。

なお、Fig. 5 の説明では f_{r-sol} が r に対して線形であることを仮定したが、実際のソレノイド磁場は僅かに非線形である。Figure 7 上図は、Fig. 5 の計算で用いたソレノイド磁場の z 方向成分をビーム軸に沿って示したものであり、下図は、中央の A 点、および $z = \pm 20$ mm の B 点での B_z の r 依存性を示している。ソレノイド両端部の B 点では、 B_z は径方向外側で減少しており、中央部では外側で増加している。 f_{r-sol} の r 依存性は集束力であることから、 B_z の依存性とは凹凸が逆となるため、両端では下に凸、中央部では上に凸になる。したがって、この f_{r-sol} に対応したエミッタンスの増減が現れるはずであるが、Fig. 5 では確認できない。これは、ソレノイドコイル位置でのビームサイズが約 1 mm と小さいために f_{r-sol} の非線形性の影響が小さいこと、および f_{r-sol} の非線形性に比べて間電荷効果による非線形性の方が大きいことによる。

ソレノイド磁場によるエミッタンス増減現象を確認するため、ソレノイド磁場の非線形効果を大きくした場合

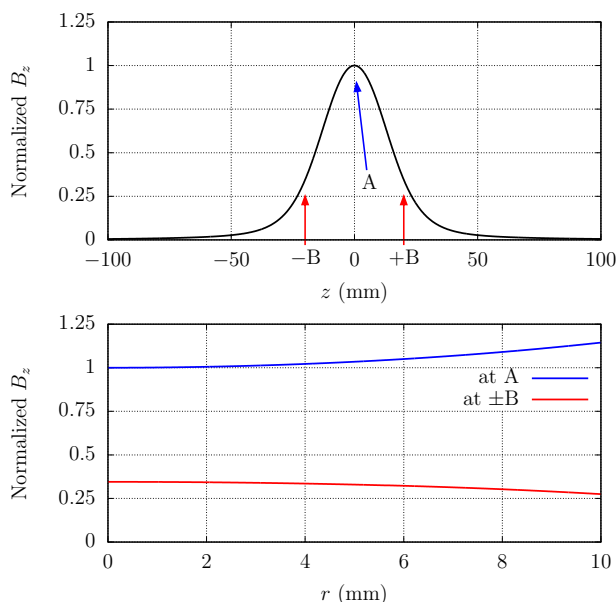


Figure 7: Non linearity of fields of the solenoid coil which is used in Fig. 5.

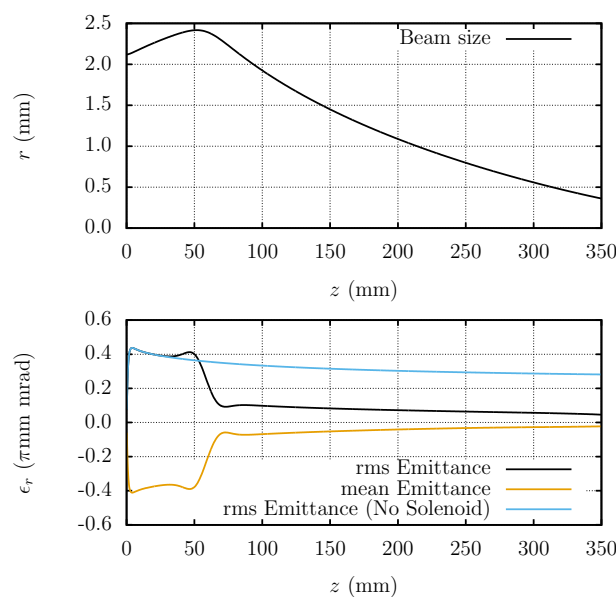


Figure 8: Behaviors of rms and mean emittance for an ideal DC-accelerated continuous beam with solenoidal fields which non-linearity is high.

の計算を Fig. 8 に示す。空間電荷効果の影響を小さくし、かつ、ソレノイドコイル位置でのビーム径を大きくするために、初期ビーム径を $\phi 6 \text{ mm}$ とし、ソレノイドコイルは Fig. 5 で用いたものと同じであるが、中心位置を $z = 60 \text{ mm}$ と後方にずらした。その他の計算条件は Fig. 5 と同一である。

Figure 8 上図より、ソレノイドコイルでビームが集束されているのが分かる。下図にエミッタンスを示す。 f_{r-sol} は、ソレノイドコイル両端で下に凸、中央部で上に凸となるが、mean エミッタンスがそれに対応し、ソレノイドコイル入口でまず減少し、その後大きく増加し

た後、出口で減少に転じている。rms エミッタンスは、mean エミッタンスの絶対値にほぼ等しい。その結果、ソレノイドコイルを用いない場合の rms エミッタンスと比べ、ソレノイドコイル部で大きく減少している。なお、ソレノイドコイルを用いない場合の rms エミッタンスの減少が Fig. 1 に比べて非常に緩やかなのは、空間電荷効果が小さいからである。

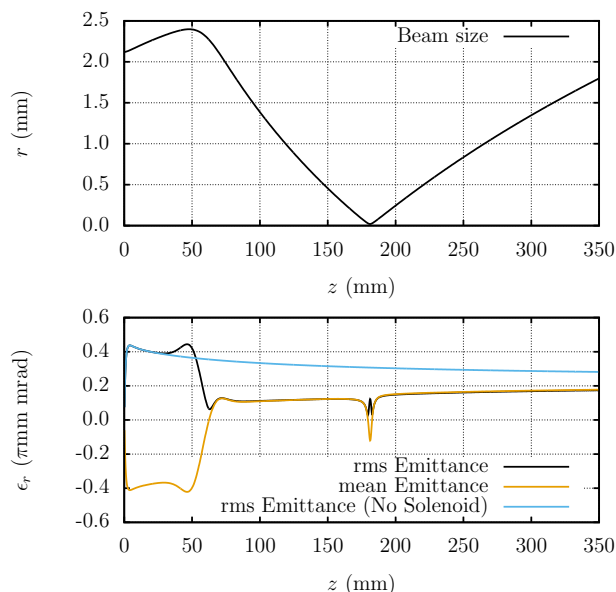


Figure 9: Behaviors of rms and mean emittance for an ideal DC-accelerated continuous beam with strong focusing.

Figure 9 に、Fig. 8 の計算例においてソレノイド磁場を強くした場合の結果を示す。ビームは Fig. 8 よりも強く集束されており、それに伴って、ソレノイド中央部分での mean エミッタンスの増加量が Fig. 8 よりも大きくなっている。このため、負であった mean エミッタンスがソレノイド出口付近で正になっており、mean エミッタンスの絶対値にほぼ等しい rms エミッタンスも、それに呼応して一旦増加している。その後、Fig. 7 における +B 点の影響で僅かに減少した後は、mean エミッタンスが正を維持するために rms エミッタンスが増加している。このように、Fig. 8 とは異なった振舞いを示すが、そのメカニズムは同一であることが良く分かる。

なお、後方のビーム集束点において、mean エミッタンスがまず減少し、その後増加している。これは、Fig. 6 で説明したのと同様、ビーム集束に伴って電荷密度分布が上に凸から下に凸に変化したものである。ただし、集束点以後では、急速に電荷分布が上に凸に戻っている。集束点周辺では mean エミッタンスが負となっており、位相空間分布も下に凸になっていることが分かる。これに伴い、rms エミッタンスは増加、減少を繰り返し、特徴的な変化を示している。

3.2 パルスビームでの計算例

Figure 10 に、パルスビームの場合の mean エミッタンスの計算例を示す。SPring-8 の RFgun 空洞を用い、空間電荷効果によるエミッタンス減少効果を積極的に活用した電子源システムをデザインしたものであり、連続ビー

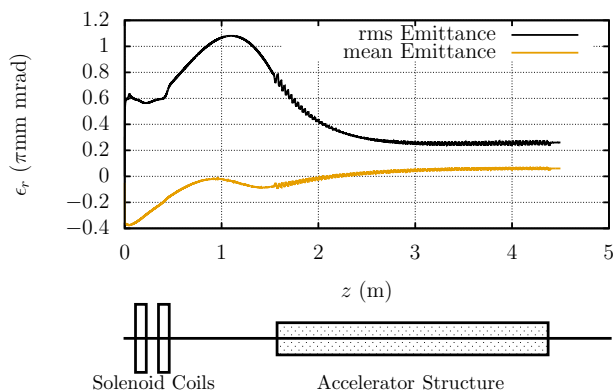


Figure 10: Time evolution of rms and mean emittance for the SPring-8 rf gun system.

Table 1: Parameters Used in Calculations for the SPring-8 Rf Gun System

Initial charge	50 pC/bunch
Laser width	9 ps uniform
Laser spot size	φ1.4 mm uniform
Initial rf phase	sin 5°
Initial emittance	0 mrad
Maximum electric field on cathode surface	157.0 MV/m
Beam energy at exit of cavity	3.6 MeV
Beam energy at exit of Acc. Structure	30.0 MeV

ムの例と同様、本学会年會において報告 [1] 済みである。計算パラメータは Table 1 に示すとおりであり、空洞出口において 2 台のソレノイドコイルで絞ったビームを加速管で 30 MeV まで加速している。加速管の途中まで空間電荷効果によるエミッタンス減少が続き、加速管出口で超低エミッタンスを実現している。

mean エミッタンスは、rms エミッタンスが減少する領域でゼロに近くなっているものの、mean エミッタンスの絶対値と rms エミッタンスは一致していない。これは、ここでのエミッタンスが、rms、mean エミッタンスともに、バンチ全体の投影エミッタンスであることによる。すなわち、一つのスライスエミッタンスは Fig. 2 に示すように一本の曲線で表されるが、投影エミッタンスは複数の曲線で表されるので、任意の 2 電子が成す面積は、正負の場合が混在する。mean エミッタンスの絶対値が rms エミッタンスに一致しないのはこのためである。ただし、バンチ全体としての位相空間分布の凸凹、あるいは、バンチ全体としての f_r の凸凹は、mean エミッタンスから判断できる。なお、mean エミッタンスにソレノイド磁場の非線形性の影響が表れていないのは、ビームサイズが小さいからである。

Figure 11 に、バンチ中央のスライスの、rms および mean エミッタンスを示す。このように 1 つのスライスエミッタンスに着目すれば、連続ビームの場合と同様、mean エミッタンスの絶対値がほぼ rms エミッタンスに一致することが分かる。 $z > 3$ m 以降で一致していない

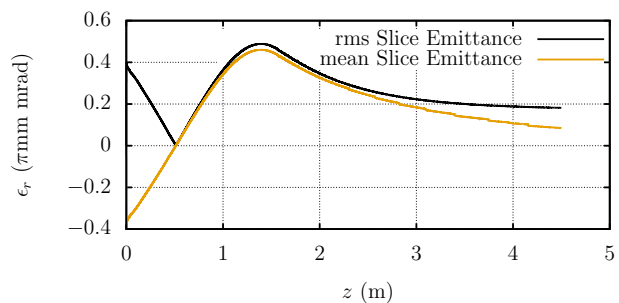


Figure 11: Time evolution of rms and mean slice emittance for the SPring-8 rf gun system.

のは、 S が正規分布から外れてくる為である。

なお、これまでの計算例では該当しないが、計算精度が悪い場合にも mean エミッタンスの絶対値は rms エミッタンスに一致しない。これは、計算ノイズの為に位相空間分布が一本の曲線で表されず、ある程度の広がりを持ってしまう場合があるからである。

4. まとめ

線型加速器で良く用いられる rms エミッタンスは保存量ではなく、減少する場合もあることが知られている。本報告では、rms エミッタンスの増減の程度を定量的に表すことのできる新指標を提案した。rms エミッタンスは、位相空間上の任意の 2 電子と原点が成す平行四辺形の面積 S の 2 乗平均平方根で表されるのに対し、新指標は S の算術平均で表すこととした。ただし、2 電子が位相空間上で下に凸の関係にある場合、それに対応する S は負と定義する。この結果新指標は、その正負によって位相空間分布の凸凹が判断でき、かつ、その増減によって、ビームに作用する f_r の $r - f_r$ 空間内での凸凹が判断できるものとなる。新指標は下に凸の f_r がビームに作用する場合は必ず減少するので、エミッタンスの増減を分かり易く表現できる。また、新指標の絶対値がほぼ rms エミッタンスに一致することから、エミッタンス減少の程度を定量的に表現することができる。本報告では、エミッタンス低減現象について新指標の振舞いにより説明し、空間電荷効果だけではなく、ソレノイド磁場によってもエミッタンス減少が起こり得ることを示した。

参考文献

- [1] A. Mizuno, “空間電荷効果によるエミッタンス低減現象を活かした電子銃システムの設計”, Proceedings of the 13th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, Chiba, Japan, Aug. 8-10, 2016, pp. 135-139.
- [2] K. Masuda, “Development of Numerical Simulation Codes and Application to Klystron Efficiency Enhancement”, Ph.D.thesis, Kyoto University, 1997; <http://hdl.handle.net/2433/24255>
- [3] A. Mizuno, Phys. Rev. Accel. Beams 19, 024201 (2016); DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.19.024201>
- [4] A. Mizuno, K. Masuda, M. Yamamoto, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A 774, 51 (2015); DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nima.2014.11.068>