

超低速ミュオンのペニングトラップ用箱型電極の設計検討

DESIGN STUDIES OF BOX-SHAPED ELECTRODES FOR A PENNING TRAP OF ULTRASLOW MUONS

小久保拓登^{*,A)}, 飯沼裕美^{A)}, 足立泰平^{B)}, 岩井遼斗^{C)}, 岡部博孝^{D)}, 下村浩一郎^{C)},
永谷幸則^{C)}, 仁尾真紀子^{B)}, 西村昇一郎^{C)}, Amba Dat Pant^{C)}, 樋口嵩^{E)}, 平石雅俊^{A)}
Hirotaka Kokubo^{*,A)}, Hiromi Iinuma^{A)}, Taihei Adachi^{B)}, Ryoto Iwai^{C)}, Hirotaka Okabe^{D)},
Koichiro Shimomura^{C)}, Yukinori Nagatani^{C)}, Makiko Nio^{B)}, Shoichiro Nishimura^{C)}, Amba Dat Pant^{C)},
Takashi Higuchi^{E)}, Masatoshi Hiraishi^{A)}

A) Graduate school of Science and Engineering, Ibaraki University

B) Nishina Center for Accelerator-Based Science, RIKEN

C) Institute of Materials Structure Science, High Energy Accelerator Research Organization (KEK)

D) Institute for Materials Research, Tohoku University

E) Research Center for Nuclear Physics, Osaka University

Abstract

At the J-PARC MLF/H-Line, an experiment to measure the fundamental properties of the muon by a Penning trap is planned. The final target precisions are 1 parts-per-billion (ppb) for the magnetic moment and the mass, and 1 parts-per-million for the lifetime. A trapping electromagnetic field of a Penning trap is provided by a homogeneous magnetic field and a quadrupolar electrostatic potential. Electrodes to produce the electric potential are therefore an essential component of this experiment. In this article, design studies of box-shaped segmented electrodes for the muon Penning trap are described. The electrodes were modeled in OPERA-3D, and the differences of the produced electric potential from the ideal one were evaluated. Different patterns of the electrode arrangement were compared to select the electrode design with minimum error in the central region of the trap.

1. はじめに

素粒子標準模型を超える物理探索のため大強度陽子加速器施設 J-PARC(Japan Proton Accelerator Research Complex) 内の MLF(Materials and Life Science Experimental Facility) H-Line [1] ではミュオン基礎物理定数測定実験が行われている。既存のプロジェクトに加え、我々は、ペニングトラップを用いたミュオンの基礎物理量の精密測定実験を計画している。ペニングトラップは、これまで様々な荷電粒子の質量 [2,3] や磁気モーメント [4-7] の高精度測定に広範に用いられてきた。通常ミュオン施設から供給されるミュオンはペニングトラップで捕獲するにはエネルギーが高すぎるが、運動エネルギー約 0.03 eV の超低速ミュオン生成技術 [8] によってペニングトラップの手法をミュオンに適用することが可能となる。我々は、最終的には、ミュオンの質量と磁気モーメントを 1×10^{-9} 、寿命を 1×10^{-6} の相対精度で測定することを目標としている。

ペニングトラップは Fig. 1 (a) のようなトラップ軸方向の一様磁場と次式のような 4 重極静電ポテンシャルの重ね合わせによって荷電粒子を閉じ込める。

$$\Phi(z, r) = V_0 \frac{z^2 - r^2/2}{2z_0^2} \quad (1)$$

このトラップ中で荷電粒子が感じる電磁場は、

$$\mathbf{B} = B_z \hat{z}, \quad E_z = -V_0 \frac{z}{z_0^2}, \quad E_r = V_0 \frac{r}{2z_0^2} \quad (2)$$

と表される。ここで、 z_0 はトラップの形状によって決まる長さの次元を持つ量である。この電磁場によって閉じこめられた荷電粒子の運動は、Fig. 1 (b) に示すような、3つの固有モードの重ね合わせとして表される。これらは、modified cyclotron mode、axial mode、magnetron mode と呼ばれ、それぞれの固有周波数 ω_+ , ω_z および ω_- は、次式のように表される [9]。

$$\omega_z = \sqrt{\frac{qV_0}{mz_0^2}}, \quad \omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}) \quad (3)$$

ここで、 q, m はそれぞれ粒子の電荷と質量、 V_0 はトラップ電極に印可される電圧。また、 $\omega_c = qB/m$ は、磁場 B 中の粒子のサイクロトロン周波数である。

実験セットアップは Fig. 2 に示すものを検討中である。本実験では入射してくる表面ミュオンを電極内に配置したミュオニウム (正ミュオンと電子との束縛状態) 生成標的に衝突させる。そこで生成される超低速ミュオニウムを直ちにレーザー乖離させる事によって超低速ミュオン [8] を生成する。生成された超低速ミュオンに RF 空洞内で振動磁場を印加する事によりスピンを反転させ電極中心へと輸送する。中心へ輸送した超低速ミュオンを 4 重極静電ポテンシャルによってトラップする。崩壊陽電子がミュオンのスピン方向に出やすい事から陽電子検出によ

* 22nm016s@vc.ibaraki.ac.jp

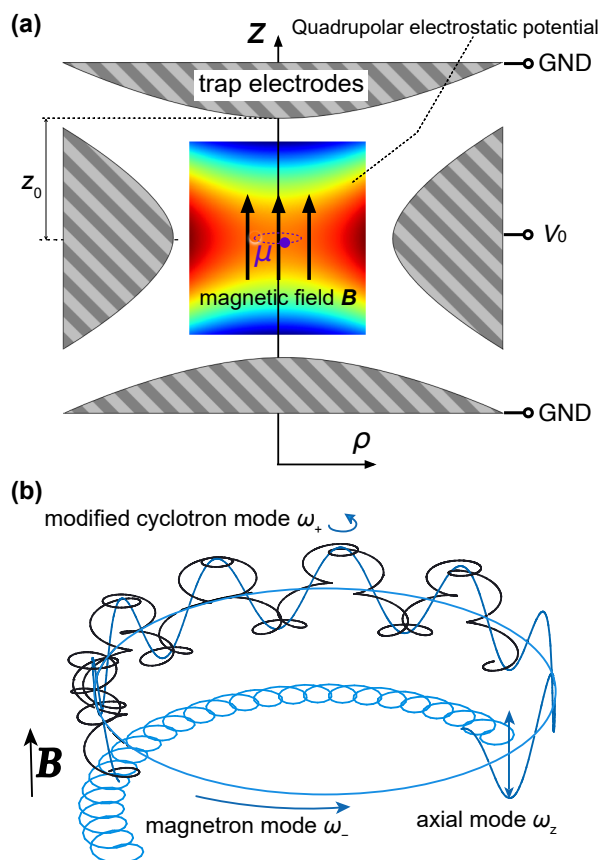


Figure 1: Confinement of a charged particle by a Penning trap. (a) A magnetic field and a quadrupolar electrostatic potential for confining a charged particle. (b) Motions of a particle in a Penning trap. They can be decomposed to three eigenmotions. The figure adapted from Ref. [10] with modifications under the author's permission.

てミュオンスピンを測定し、ミュオン磁気能率を決定する事が出来る。

この実験において箱型形状のRF空洞内で表面ミュオンが入射して生成されたミュオニウムを電離レーザーで電離した時、平面状に発生したミュオン分布をトラップする。この時箱型形状の電極を用いることで平面状のミュオンビームを単位体積あたりに効率良くトラップすることが出来る。そのため、トラップ用電極は箱型形状電極の使用を検討している。ビーム制御の観点からトラップには高精度の4重極静電ポテンシャルを作る電極が必要であり、高精度測定を行うためにはこの箱内の分布電極の配置が非常に重要である。そこで OPERA-3D [11] を用いて電極が作る4重極静電ポテンシャルと理想的な4重極静電ポテンシャルとの誤差を評価し、トラップ中心付近での理想ポテンシャルとの誤差を最小にするような電極配置の検討を行っている。

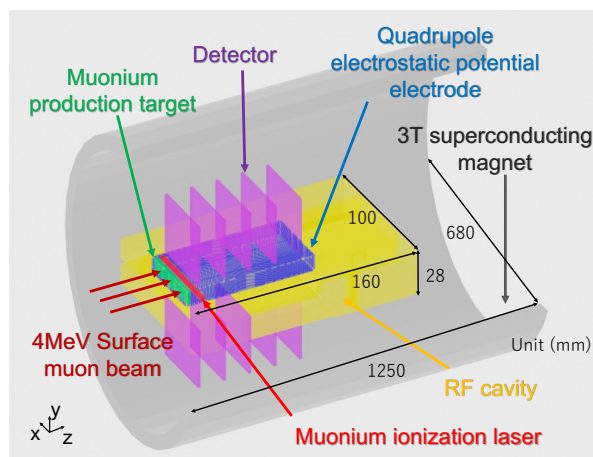


Figure 2: Schematic view of the Penning trap experiment of muons. A surface muon beam injected to the muonium production target. Muonium atoms emitted from the target are ionized by a laser, and produce ultraslow muons with kinetic energies of ~ 0.03 eV, which are then introduced inside the trap electrodes. An RF cavity surrounding the electrodes is used for excitation and spin manipulation of the muons. The motion of decaying muons are detected by counting positrons by the segmented detectors.

2. 箱型電極の設計

2.1 電極形状の概要設計

通常のペニングトラップでは回転対称形状の電極が用いられるが、本実験では並進対称形状の電極を用いたペニングトラップの設計を検討している。回転対称性を持つ電極と並進対称性を持った電極との例と、それらの電極によって作り出されるトラップ電磁場中の粒子軌道を Fig. 3 に示す。回転対称型の電極内で発生する電磁場は Eq. (1) で示した通りである。一方、並進対称型の電極が作るポテンシャルは以下のように与えられる。

$$\Phi(z, x) = V_0 \frac{z^2 - x^2}{2z_0^2} \quad (4)$$

トラップ内で電磁場は以下の式のように与えられる。

$$\mathbf{B} = B_z, \quad E_z = -V_0 \frac{z}{z_0^2}, \quad E_x = V_0 \frac{x}{z_0^2}, \quad E_y = 0 \quad (5)$$

電極内での荷電粒子は Fig. 3 (d) のような運動を行う。ミュオンは電極外に出るより先に崩壊するため、並進対称形状の電極でトラップを行うことが出来る。よって本実験は、並進対称性を持った箱型電極を用いて行うことを想定している。

2.2 電極設計詳細

電極設計時の方針を示す。理想的な4重極静電ポテンシャル Φ_{ideal} とするとこれはラプラス方程式を

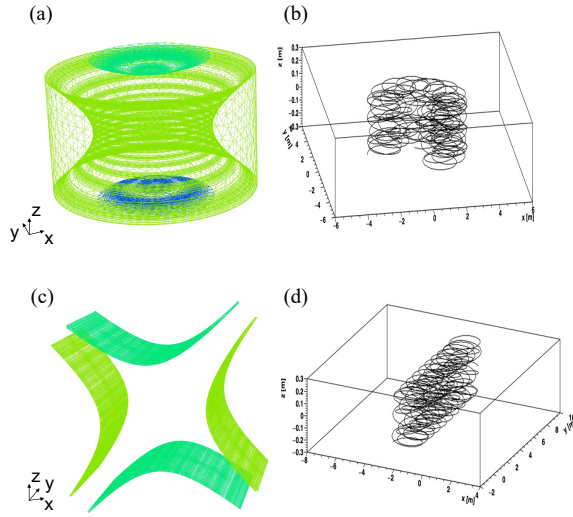


Figure 3: Electrodes and particle orbits. (a) Electrode configuration with a rotational symmetry, and (b) charged particle orbits in the field produced by these electrodes. (c) Electrode configuration with a transnational symmetry, and (d) charged particle orbits in the field produced by these electrodes.

満たすことから

$$\Delta\Phi_{ideal} = 0 \quad (6)$$

さらに実際の電極配置によって作られる4重極静電ポテンシャル Φ_{real} もラプラス方程式を満たすので

$$\Delta\Phi_{real} = 0 \quad (7)$$

これらより両者の差分であるポテンシャル誤差 f もラプラス方程式を満たすことから

$$\Delta f = \Delta(\Phi_{real} - \Phi_{ideal}) = 0 \quad (8)$$

である。

誤差がラプラス方程式の解であることからポテンシャル論 [12] の成果を借りると

「最大値原理より誤差が恒等的に定数でない限り、誤差の極大または極小となる点は領域内部にはなく、それは必ず境界上にある。」

これは電極作成において誤差の極大が電極を配置し、電圧を与えた境界面に現れるということである。このことから電極内部での誤差を小さくするため電極配置位置での静電ポテンシャルを理想的な4重極静電ポテンシャルに近づけることが重要である。今、4重極静電ポテンシャルを作り出す電極分割を Fig. 4 に示す。

電極に与える電圧は以下のように定義する。

$$\Phi(x, z = |z_{end}|) = \begin{cases} V_{max} & (0 \leq |x| \leq x_1) \\ V_{max} + \Delta V_1 & (x_1 < |x| \leq x_2) \\ \vdots & \vdots \\ V_{max} + \Delta V_1 + \cdots + \Delta V_i & (x_{i-1} < |x| \leq x_i) \end{cases} \quad (9)$$

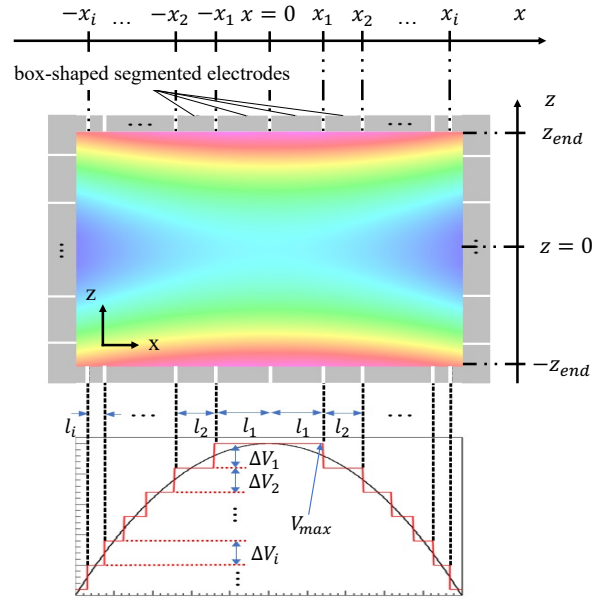


Figure 4: Definition of the parameters of box-shaped segmented electrodes to produce a quadrupolar electrostatic potential. Potential is produced by applying a step-like voltage to each electrode. The length of the i th electrode l_i and the voltage step between the adjacent electrode ΔV_i (see Eq. (9),(10)) are defined.

ここで電極幅と電極位置との関係は

$$l_i = x_i - x_{i-1} \quad (x_0 = 0) \quad (10)$$

である。電極を $l_1 = l_2 = \cdots = l_i$ や $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \cdots = \Delta V_i$ と任意に指定し、分割方法を変えて並べることで箱型電極をデザインすることができる。電極が作り出すポテンシャル分布は配置する1つ1つの電極中心に理想的な4重極静電ポテンシャルに沿うような電圧を印加することで生成されるため電極幅や電極数によって精度が決定される。

3. OPERA-3D を用いて作成した電極モデルの評価

本章では電極 xy 平面の電極幅が隣り合う電極間で電圧幅一定 ($\Delta V_1 = \Delta V_2 = \cdots = \Delta V_i$) となる様にデザインしたモデル Fig. 5 (a) と単に電極幅一定 ($l_1 = l_2 = \cdots = l_i$) となる様にデザインしたモデル Fig. 6 (a) の2通りの箱型電極の作るポテンシャルと理想的な4重極静電ポテンシャルとの誤差を比較し、実験を踏まえた妥当性について議論する。

3.1 電圧幅一定での設計電極評価

Figure 5 (b),(c) に $y = 0$ mm での理想ポテンシャルとの誤差 $f(x, z)$ 及び、 $z = 50$ mm, $y = 0$ mm での電極がもたらす静電ポテンシャルの分布と理想的な静電ポテンシャルを示す。

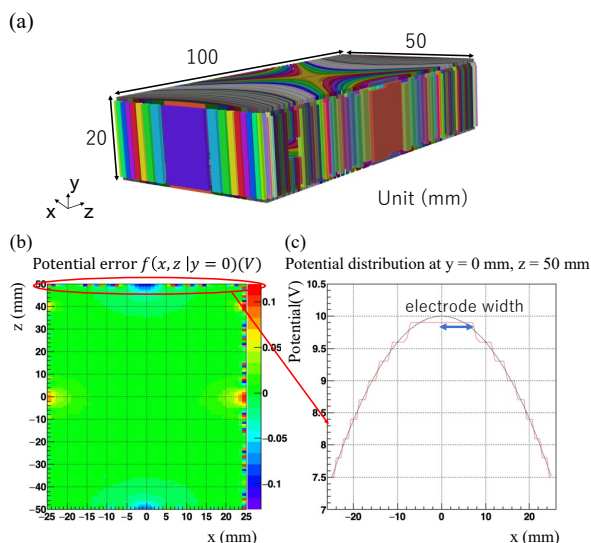


Figure 5: (a) Electrode model designed in OPERA-3D with SCALA [11]. The electrode configuration is chosen such that the voltage step ΔV_i is constant. (b) Distribution of the the potential error $f(x, z)$, defined by the difference between the potential created by the electrodes and the ideal potential. (c) Potential distribution along $y = 0$ mm and $z = 50$ mm compared between the one produced by the segmented electrodes (balck) and the ideal one (red).

$z = 50$ mm では電極を配置している位置なので電極の分布を見ることができる。4重極静電ポテンシャルは x の増加に対して2乗で電圧値が増加するため、電極端部によるほど電極幅が小さくなっていることがわかる。また、常に ± 0.1 V となる電極幅で電極を設計したため、静電ポテンシャル誤差のグラフを見てわかるように、誤差の極大値は境界面に ± 0.1 V で現れていることがわかる。

よって電極内部ではどこでも 0.1 V よりも低い誤差で静電ポテンシャルが再現される。このとき、中心付近 (-5 mm $\leq x \leq 5$ mm, $y = 0$ mm, -10 mm $\leq z \leq 10$ mm) での最大誤差は $x = -4$ mm, $z = -1$ mm で 0.0024 V である。この時のビーム入射面から電極の占める面積を除いたもの(開口率)は 26.24% ほどである。しかし、Fig. 5 (a) を見てもわかる通りこのモデルでは x, y 平面にミュオンビームが通れるスペースが特に中心付近にないことが分かる。これでは電極の作る静電ポテンシャルの精度が良かったとしてもトラップ内に入射されるミュオンは電極内へ通過することが出来ない。よって電極入口平面でのビーム通過率を上昇させる必要がある。

3.2 電圧2乗幅(電極幅)一定での設計電極評価

Figure 6 (b),(c) に $y = 0$ mm での理想ポテンシャルとの誤差 $f(x, z)$ 及び、 $z = 50$ mm, $y = 0$ mm の切断面での電極がもたらす静電ポテンシャルの分布と理想的な静電ポテンシャルを示す。

先述の通り電極入り口 x, y 平面でのビーム通過率を

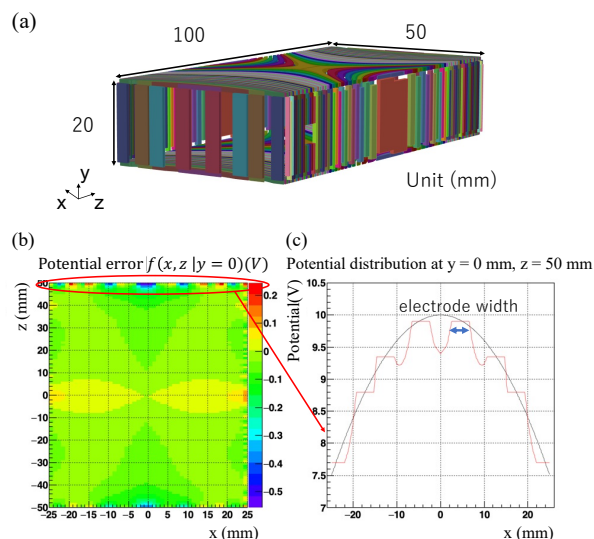


Figure 6: (a) Electrode configuration where the electrode width l_i is kept constant. (b) Distribution of the potential error $f(x, z)$. (c) Potential distribution along $y = 0$ mm and $z = 50$ mm compared between the one produced by the segmented electrodes (balck) and the ideal one (red).

上げることを考え、 x, y 平面での電極分布を変更する。この時ビームが入射する電極 x, y 平面での電極端部が小さくならず、電極中央部が大きくなるために電極の電圧2乗幅(電極幅)が一定になるように電極を配置した。

電圧誤差分布を見ると理想的な静電ポテンシャルとの誤差が先述のモデルよりも $z = 50$ mm の電極付近では大きくなってしまっていることがわかる。しかし、 y, z 平面での電極配置は電極の隙間から外側のRF空洞から来る振動磁場が通ればいので電圧幅一定の電極配置のままにしている。このとき、中心付近 (-5 mm $\leq x \leq 5$ mm, $y = 0$ mm, -10 mm $\leq z \leq 10$ mm) での最大誤差は $x = 0$ mm, $z = 10$ mm で 0.0327 V である。この時のビーム入射面での開口率は 39.84% ほどである。Figure 6 (b) を見てわかるようにビーム通過率向上のためにスペースを開けた空間付近の誤差が大きくなっている。そして、 z 正負方向から伝搬するポテンシャルの誤差が中心付近のポテンシャル精度に影響を及ぼしていることが分かる。先ほどのモデルとの比較を Table 1 に示しておく。

Table 1: Comparison of the potential error and the aperture ratio between difference configurations of the segmented electrodes. Here, the aperture ratio of the area of the upstream face which is not covered by the electrodes.

	Constant voltage step ΔV_i	Constant electrode width l_i
Maximum potential error (V)	0.0024	0.0327
Aperture ratio	26.24%	39.84%

電極配置パターンに大きく影響されるが、開口率が

13% 上昇した事に対し、最大電圧誤差は約 10 倍となってしまう。電極内へのビーム入射率や RF 振動磁場注入、設計限界を考えると配置する電極の幅には制限がある。現段階では、依然として電極分割方法については考慮の余地があるが、次章ではポテンシャル精度を上昇させるための別の方法について述べる。

4. 電極内指定領域での誤差最小化の検討

前述の電極設計では電極配置境界面での精度を満足する電極分布を与え実際の箱内ポテンシャルの評価を行ってきたが、ここでは精度の要求される電極内での領域での誤差ポテンシャルについて直接考えることから電極配置を求める。前章で述べたようにポテンシャル誤差は $f(x, y, z)$ で与えている。ある電極分割をした際に電極内部の指定領域外縁部境界面での誤差 $f(x, y, z)$ を積分した値を求め、その値が最小となるような電極配置を算出することが出来る。実際に算出する方法はまずある電極幅、印加電圧を決定し箱型電極内部でのビーム蓄積領域を決める。そしてその境界面での誤差が最小となるように電極を動かす。電極内でのビーム蓄積領域外縁部表面 S_0 を Fig. 7 に示す。

ここである電極分割をした電極内、ビーム蓄積領域

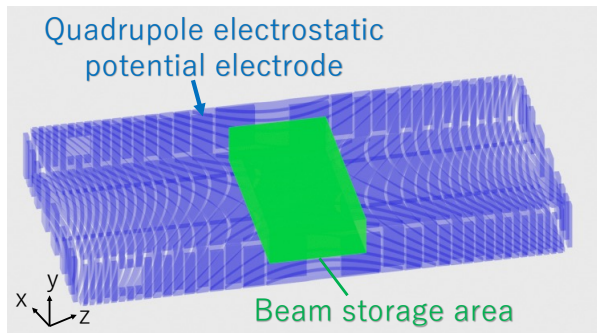


Figure 7: The green central region indicates the beam storage region which is the region of interest of the potential optimization. The potential is derived such that the error integral $E[f_{pattern}]$ on the surface of this region of interest is minimized (see Eq. (11)).

外縁部表面での誤差 $f_{pattern}(x, y, z)$ からエラー関数 $E[f_{pattern}]$ をビーム蓄積領域外縁部表面での微小面積 dS_0 として以下のように定義する。

$$E[f_{pattern}] = \int_{(x,y,z) \in S_0} |f_{pattern}(x, y, z)|^2 dS_0 \quad (11)$$

エラー関数、誤差は電極を動かす事によって変化する。ここでエラー関数が減少していくように電極を動かし最小になるとき $E[f_{pattern}]$ は極値を持つはずである。

$$\frac{\partial E}{\partial f_{pattern}} = 0 \quad (12)$$

よって、Eq. (12) を解いて出てくる極小解 $E[f_{pattern}]$ の中から最小であるものを求めると、その時の $f_{pattern}$ の境界条件が誤差最小での電極配置として求まる事となる。

5. まとめ

J-PARC におけるミュオンの磁気能率精密測定実験におけるペニングトラップ実現に向けた箱型電極の設計・検討を行っている。OPERA-3D を用いて箱型電極境界面での 4 重極静電ポテンシャルの精度やビーム通過率を考慮した電極配置での電極モデル設計を行った。その中でビーム入射面での電極分割を電圧幅が一定の電極モデルと電極幅が一定のモデルとの 4 重極静電ポテンシャルの精度を比較し、電極幅や電極開口率について検討を行った。また、指定した領域境界での条件からラプラス方程式を解き直接箱型電極境界での電極配置を求めるという手法を使って設計を行う事にした。現在は電極内ビーム蓄積領域境界での誤差ポテンシャルが最小となる電極配置の算出を行なっている。先例のない並進対称箱型電極によるミュオンのペニングトラップ実験に向け電極実機開発のための設計・検討を進めていく。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 JP19K21872、JP20H05646 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] N. Kawamura *et al.*, Prog. Theor. Exp. Phys., 2018, 113G01 (2018).
- [2] K. Blaum, Phys. Rep. 425, 1–78 (2006).
- [3] F. Heiße *et al.*, Phys. Rev. Lett. 119, 033001 (2017).
- [4] X. Fan *et al.*, arXiv:2209.13084 (2022).
- [5] G. Schneider *et al.*, Science 358, 1081–1084 (2017).
- [6] C. Smorra *et al.*, Nature 550, 371–374 (2017).
- [7] S. Sturm *et al.*, Nature 506, 467–470 (2014).
- [8] K. Nagamine *et al.*, Phys. Rev. Lett. 74, 4811–4814 (1995).
- [9] L.S. Brown and G. Gabrielse, Rev. Mod. Phys. 58, 233–311 (1986).
- [10] G. Schneider, PhD thesis, Johannes Gutenberg-Universität Mainz (2018).
- [11] OPERA 3D, Electromagnetic design in three dimensions. COBHAM, Vector Fields Simulations Software, Kildington, UK; <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/opera/>
- [12] 宇野利雄, 洪姫植, 「ポテンシャル」, 東京, 培風館, (1961).